II Test - Geometria

28 gennaio 2014

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \alpha(x-2)+z+3=0 \\ \alpha x-2=0 \\ x-1=0 \end{cases}$$

Si discuta il numero di soluzioni, precisando il significato geometrico al variare di α (interpretare le equazioni in $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$, riferendosi a un sistema di coordinate (x, y, z)). [Per $\alpha = 2$ il sistema ha ∞^1 soluzioni: due soli piani paralleli; per $\alpha \neq 2$ non ci sono soluzioni (il primo e il terzo piano sono incidenti, per $\alpha \neq 0$ il secondo è parallelo al terzo)] $\boxed{5}$

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ siano π il piano di equazione $x+y+z-1=0$ e $A(1,1,-1)$ e $B(1,1,5)$ due punti.

(a) Determinre la posizione reciproca tra il piano π e la retta per A e B (stabilire anche se sono ortogonali o no). $\boxed{3}$

(b) Determinare le equazioni del luogo $\mathcal{L}$ dei punti C appartenenti al piano π per i quali il triangolo ABC è rettangolo in C. $\boxed{6}$

(c) Riconoscere il luogo $\mathcal{L}$. $\boxed{2}$

[La retta e il piano sono incidenti e non ortogonali. Il luogo è l'intersezione tra la sfera $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z=3$ (di centro (1,1,2) e raggio 3) con il piano π.]

Esercizio 3. Nel piano proiettivo complesso, sia $\mathscr{C}$ il fascio di coniche:

$$\mathscr{C} \;:\; x^2+4y^2+2(k+3)xy-2x-2(2k+4)y=0, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Determinare:

(a) le coniche degeneri del fascio, i punti base e il tipo di fascio; [Fascio di coniche tangenti; i punti base hanno coordinate: $(0,0),(2,0),(2,-1)$, le coniche degeneri sono rappresentate dalle equazioni: $(x+2y)(x+2y-2)=0$ e $y(x-2)=0$.] $\boxed{4}$

(b) la classificazione affine delle coniche del fascio, al variare di k; [parabole per $k = -1, -5$, ellissi per $-5 < k < -1$ e iperboli negli altri casi.] $\boxed{2}$

(c) posto $k=-2$ il centro della conica e le equazioni delle tangenti ad essa condotte dal punto $P(4;-1)$. [centro: $(4/3, -1/3)$, tangenti: $y+1=0$, $x+2y-2=0$] $\boxed{5}$

Esercizio 4. Data, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice A_k seguente:

$$A_k = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ k^2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

stabilire:

(a) se la forma rappresentata dalla matrice data rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è definita positiva; [definita positiva per $k = \pm 1$] $\boxed{3}$

(b) se la base canonica è ortogonale. Se non lo è, determinare una base ortogonale. [La base canonica non è ortogonale. Ad es. ((0,0,1), (1,0,0), (1,-4,0)) lo è] $\boxed{6}$